ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 262

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδες 246 - 247

Α4. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x^2)'\cdot(x^2+1) - x^2\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{2x\cdot(x^2+1) - x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f ΄(x)		-	0	+	
f (x)		↘		↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 0$.

B2. $f''(x) = \left(\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right)' = \dfrac{(2x)'\cdot(x^2+1)^2 - 2x\cdot\left[(x^2+1)^2\right]'}{(x^2+1)^4}$

$$= \frac{2(x^2+1)^2 - 2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{\cancel{(x^2+1)}\cdot\left[2(x^2+1) - 8x^2\right]}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Η f είναι κοίλη στα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, ενώ είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

Η C_f έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

B3. • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

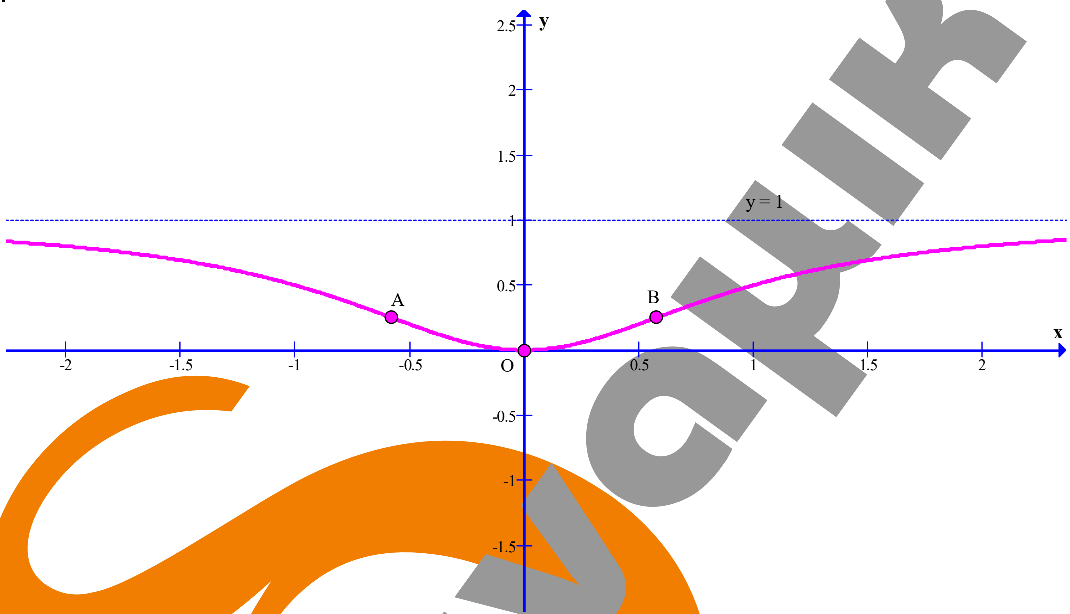
άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 1$

• Η C_f είναι συνεχής στο IR, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = e^{x^2} - x^2 + 1$

$g'(x) = (e^{x^2} - x^2 + 1)' = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x \cdot (e^{x^2} - 1)$

$g'(x) = 0 \iff 2x \cdot (e^{x^2} - 1) = 0 \iff x = 0$ ή $e^{x^2} = 1 \iff x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	-	0	+
$e^{x^2} - 1$	+	0	+
$g'(x)$	**-**	0	**+**
$g(x)$	↘		↗

- $x < 0 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$
- $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$
- $g(0) = 0$

Επομένως η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 + 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα το $x_0 = 0$

Γ2. $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow |f(x)| = g(x)$

Έστω ρ ρίζα της f, άρα $f(\rho) = 0$

Είναι $f^2(\rho) = g^2(\rho) \Leftrightarrow 0 = g^2(\rho) \Leftrightarrow g(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$

Η συνεχής f δεν έχει ρίζες σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Από συνέπειες θ. Bolzano η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις :

1η περίπτωση: $f(x) > 0$ στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

άρα $\mathbf{f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in IR}$

2η περίπτωση: $f(x) < 0$ στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

άρα $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1) \Leftrightarrow$

$\mathbf{f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1, x \in IR}$

3η περίπτωση: $f(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$

άρα $\mathbf{f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}}$

4η περίπτωση: $f(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$

άρα $\mathbf{f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1, & x < 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}}$

Γ3. $f(x) = e^{x^2} - x^2 + 1$

$$f'(x) = 2x \cdot (e^{x^2} - 1)$$

$$f''(x) = \left[2x \cdot (e^{x^2} - 1)\right]' = 2 \cdot (e^{x^2} - 1) + 2x \cdot e^{x^2} \cdot 2x$$

$$= 2 \cdot (e^{x^2} - 1) + 4x^2 \cdot e^{x^2}$$

- $f''(0) = 0$
- Για $x \neq 0$ είναι $\begin{cases} x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; e^{x^2} > 1 \;\Leftrightarrow\; e^{x^2} - 1 > 0 \\ x^2 \cdot e^{x^2} > 0 \end{cases}$,

  άρα $f''(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cup$

Επομένως η f είναι κυρτή στο IR.

Γ4. $f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x + 3) - f(x),\ x \geq 0$

$h'(x) = f'(x + 3) - f'(x),\ x \geq 0$

$x + 3 > x \;\underset{f\ \text{κυρτή}}{\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}}\; f'(x + 3) > f'(x) \;\Leftrightarrow\; f'(x + 3) - f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; h'(x) > 0$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα και "1-1"

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $h(|\eta\mu x|) = h(x) \;\overset{1\text{-}1}{\Leftrightarrow}\; |\eta\mu x| = x$

Ισχύει $|\eta\mu x| \leq x$, για κάθε $x \in$ IR και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

Επομένως μοναδική ρίζα η $\mathbf{x_0 = 0}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{f(x)}{ημx}, x \in (-π, 0) \cup (0, π)$

και $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$.

Είναι $f(x) = g(x) \cdot ημx, x \in (-π, 0) \cup (0, π)$

$$f(0) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}[g(x) \cdot ημx]$$

$$= \lim_{x \to 0} g(x) \cdot \lim_{x \to 0} ημx = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) \cdot ημx}{x} = \lim_{x \to 0} g(x) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{ημx}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

άρα $\mathbf{f'(0) = 1}$

$$\int_0^π (f(x) + f''(x))ημx \, dx = π \Leftrightarrow \int_0^π (f(x) \cdot ημx + f''(x) \cdot ημx) \, dx = π \Leftrightarrow$$

$$\int_0^π f(x) \cdot ημx \, dx + \int_0^π f''(x) \cdot ημx \, dx = π \Leftrightarrow$$

$$\int_0^π f(x) \cdot (-συνx)' \, dx + \int_0^π f''(x) \cdot ημx \, dx = π \Leftrightarrow$$

$$[-f(x)συνx]_0^π + \cancel{\int_0^π f'(x)συνx \, dx} + \cancel{[f'(x)ημx]_0^π} - \cancel{\int_0^π f'(x)συνx \, dx} = π \Leftrightarrow$$

$$-f(π) \cdot συνπ - f(0) \cdot συν0 = π \Leftrightarrow -f(π) \cdot (-1) - 0 \cdot 1 = π \Leftrightarrow \mathbf{f(π) = π}$$

Δ2. α) Παραγωγίζουμε τη σχέση $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$

$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x, \quad x \in IR \quad (1)$

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, άρα από Θ.Fermat, $f'(x_0) = 0$

Στη σχέση (1) για $x = x_0$ έχουμε :

$$e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \overset{f'(x_0) = 0}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{f(x_0)} \cdot 0 + 1 = f'(f(x_0)) \cdot 0 + e^{x_0} \Leftrightarrow e^0 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$$

ΑΤΟΠΟ διότι $f'(0) = 1$

Επομένως **η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο IR**.

β) Η συνεχής f' δεν έχει ρίζες στο IR.

Από συνέπειες Θ.Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR και επειδή $f'(0) = 1 > 0$, θα είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in IR$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Δ3. Είναι $-1 \le ημx \le 1$ και $-1 \le συνx \le 1$, άρα $-2 \le ημx + συνx \le 2$

Για $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Επομένως $\dfrac{-2}{f(x)} \le \dfrac{ημx + συνx}{f(x)} \le \dfrac{2}{f(x)}$

Η γνησίως αύξουσα f έχει σύνολο τιμών το IR, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{f(x)} = 0$

Επομένως από κριτήριο παρεμβολής $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ημx + συνx}{f(x)} = 0}$

Δ4. $1 \le x \le e^{\pi} \Rightarrow 0 \le \ell nx \le \pi \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) \le f(\ell nx) \le f(\pi) \Leftrightarrow$

$0 \le f(\ell nx) \le \pi \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 \le \dfrac{f(\ell nx)}{x} \le \dfrac{\pi}{x}$

- Είναι $\dfrac{f(\ell nx)}{x} \ge 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

  άρα $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \dfrac{f(\ell nx)}{x}\,dx > 0$ (2)

- Είναι $\dfrac{f(\ell nx)}{x} \le \dfrac{\pi}{x} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{x} - \dfrac{f(\ell nx)}{x} \ge 0$

  και το "=" ισχύει μόνο για $x = \pi$

  άρα $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \left[\dfrac{\pi}{x} - \dfrac{f(\ell nx)}{x}\right] dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^{e^{\pi}} \dfrac{\pi}{x}\,dx - \int_1^{e^{\pi}} \dfrac{f(\ell nx)}{x}\,dx > 0 \Leftrightarrow$

  $\displaystyle[\pi \ell nx]_1^{e^{\pi}} > \int_1^{e^{\pi}} \dfrac{f(\ell nx)}{x}\,dx \Leftrightarrow \int_1^{e^{\pi}} \dfrac{f(\ell nx)}{x}\,dx < \pi^2$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε : $\boldsymbol{0 < \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \dfrac{f(\ell nx)}{x}\,dx < \pi^2}$