ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

Α2. α. Ψ

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x) = |x|$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ διότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

και η f δεν είναι παραγωγίσιμη διότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$$

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 73

Α4. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = (-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{x \in (-\infty, 1)\cup(1, +\infty) \text{ και } \frac{x}{1-x} > 0\right\}$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	-	0	+		+
1 - x	+		+	0	-
πηλίκο	-	0	+	‖	-

$$D_{fog} = \{x \in (-\infty, 1)\cup(1, +\infty) \text{ και } x \in (0, 1)\} = (0, 1)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \ln g(x) = \ln\frac{x}{1-x},\ x \in (0, 1)$$

$$\textbf{B2.}\ h'(x) = \left(\ell n\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{x\cdot(1-x)}$$

Είναι $h'(x) > 0$ στο $(0\ ,\ 1)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα η h είναι 1-1, άρα η h αντιστρέφεται.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} \ell n\frac{x}{1-x} \underset{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{1-x}=0}{\overset{\text{Θέτω } \frac{x}{1-x}=u}{=}} \lim_{u\to0^+}\ell n u = -\infty \\ &\lim_{x\to1^-} h(x) = \lim_{x\to1^-} \ell n\frac{x}{1-x} \underset{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x}{1-x}=+\infty}{\overset{\text{Θέτω } \frac{x}{1-x}=t}{=}} \lim_{t\to+\infty}\ell n t = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$h((0,\ 1)) = D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$y = \ell n\frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y - xe^y = x \Leftrightarrow$$

$$e^y = xe^y + x \Leftrightarrow e^y = x(e^y + 1) \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y + 1}$$

άρα $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1},\ x \in \mathbb{R}$

$$\textbf{B3.}\ \varphi'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα

$$\varphi''(x) = \left(\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\right)' = \frac{e^x\cdot(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

$$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot (1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot (1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi''(x)$		+	0	-	
$\varphi(x)$		$\cup$		$\cap$	

Η φ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$

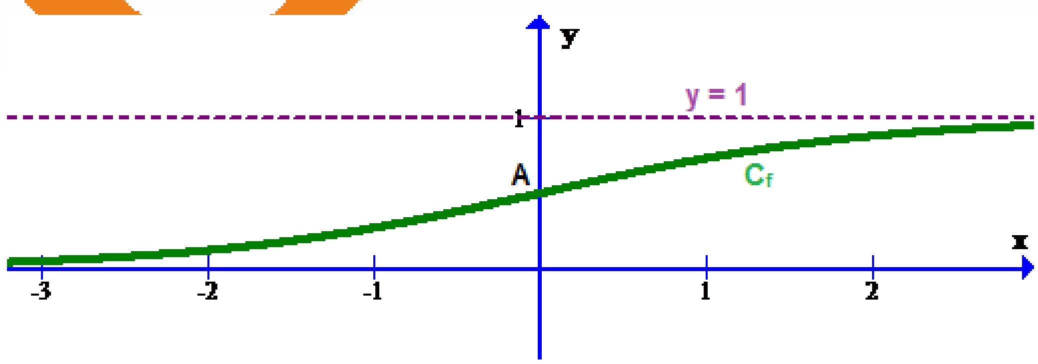
$$\varphi(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{2},$$ άρα σημείο καμπής $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B4. $$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0, \text{ διότι } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 0$ $(x'x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \underset{DL'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1,$$

άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 1$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = -ημx$ και $f'(x) = -συνx$, $x \in [0\ ,\ π]$

ε : εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0\ ,\ f(x_0))$

$ε : y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \iff ε : y + ημx_0 = -συνx_0\cdot(x - x_0)$

$A\left(\frac{π}{2}\ ,\ -\frac{π}{2}\right) \in (ε) \iff -\frac{π}{2} + ημx_0 = -συνx_0\cdot\left(\frac{π}{2} - x_0\right) \iff$

$\left(x_0 - \frac{π}{2}\right)\cdot συνx_0 - ημx_0 + \frac{π}{2} = 0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $q(x) = \left(x - \frac{π}{2}\right)\cdot συνx - ημx + \frac{π}{2}$, $x \in [0\ ,\ π]$

$q'(x) = \left[\left(x - \frac{π}{2}\right)\cdot συνx - ημx + \frac{π}{2}\right]' = \left(\frac{π}{2} - x\right)\cdot ημx$, $x \in [0\ ,\ π]$

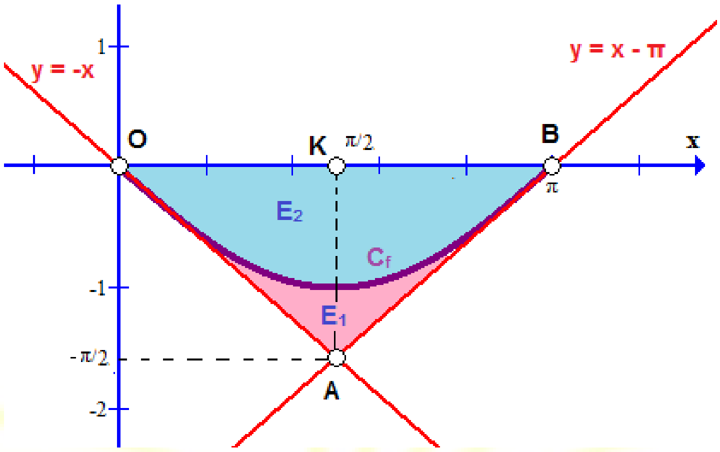
x	0		$\frac{π}{2}$		$π$
$\frac{π}{2} - x$		+	0	-	
$ημx$	0	+		+	0
$q'(x)$	0	**+**	0	**-**	0
$q(x)$		↗		↘	

- $q(0) = q(π) = 0$
- $0 < x < \frac{π}{2} \overset{q\uparrow}{\Rightarrow} q(0) < q(x) \iff q(x) > 0$
- $\frac{π}{2} \le x < π \overset{q\downarrow}{\Rightarrow} q(x) > q(π) \iff q(x) > 0$

άρα η $q(x)$ έχει μοναδικές ρίζες τις $x_1 = 0$ και $x_2 = π$

- $(ε_1) : y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \iff (ε_1) : y = -x$
- $(ε_2) : y - f(π) = f'(π)\cdot(x - π) \iff (ε_2) : y = x - π$

Γ2.



$$E_2 = -\int_0^{\pi} -\eta\mu x\, dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 1 = 2$$

$$(OAB) = \frac{1}{2}\cdot(OB)\cdot(AK) = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$E_1 = (OAB) - E_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3. $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-}\left[[f(x) + x]\cdot\dfrac{1}{f(x) - x + \pi}\right] = +\infty$, διότι

- $\lim\limits_{x\to\pi^-}[f(x) + x] = \pi > 0$ και
- $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{f(x) - x + \pi} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to\pi^-}[f(x) - x + \pi] = 0$

  αφού η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_2, άρα $f(x) - x + \pi > 0$.

Γ4. Για κάθε $x \in [1, e]$ η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_2, άρα

$$f(x) > x - \pi \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x} \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > [x - \pi\cdot\ell n x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - 1 - \pi$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $[-1\ ,\ 0)$ ως σύνθεση συνεχών.

Η f είναι συνεχής στο $(0\ ,\ \pi]$ ως γινόμενο συνεχών.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Στο } x_0=0:\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0 \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0 \\ &f(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0 \end{aligned}\right\} f \text{ συνεχής στο } x_0 = 0$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1\ ,\ \pi]$.

- $x \in [-1\ ,\ 0):\ f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left((x^4)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(x^4)^{-\frac{2}{3}}(x^4)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x^4)^{\frac{2}{3}}}\cdot 4x^3$

$$= \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{x^8}} = \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x^3}{3x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} < 0$$

- $x \in (0\ ,\ \pi]:\ f'(x) = \left(e^x \cdot \eta\mu x\right)' = e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

- $$\left.\begin{aligned} &x_0 = 0:\ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x\cdot\sqrt[3]{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{-x}\right) = 0 \\ &\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x \cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x} = 1\cdot 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

  η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

  Επομένως $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x \in [-1\ ,\ 0) \\ e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x), & x \in (0\ ,\ \pi] \end{cases}$

Η f' δεν μηδενίζεται στο $[-1\ ,\ 0)$

Στο $(0\ ,\ \pi]:\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right),\ \kappa \in Z \Leftrightarrow$

$2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4},\ \kappa \in Z \underset{\kappa=1}{\overset{x\in(0\ ,\ \pi]}{\Rightarrow}} x = \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Στο $[-1\,,\,0)$ είναι $f'(x) < 0$.

Στο $\left(0\,,\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ η συνεχής f' δεν μηδενίζεται,

άρα από συνέπειες Θ.Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο

και επειδή $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\eta\mu\dfrac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$

θα είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(0\,,\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Στο $\left(\dfrac{3\pi}{4}\,,\,\pi\right]$ η συνεχής f' δεν μηδενίζεται,

άρα από συνέπειες Θ.Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο

και επειδή $f'(\pi) = e^{\pi} \cdot (\eta\mu\pi + \sigma\upsilon\nu\pi) = -e^{\pi} < 0$

θα είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \left(\dfrac{3\pi}{4}\,,\,\pi\right]$.

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-1\,,\,0]$ και $\left[\dfrac{3\pi}{4}\,,\,\pi\right]$,

ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0\,,\,\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Η f παρουσιάζει :

- ▹ τοπικό μέγιστο για $x = -1$, την τιμή $f(-1) = 1$
- ▹ τοπικό ελάχιστο για $x = 0$, την τιμή $f(0) = 0$
- ▹ τοπικό μέγιστο για $x = \dfrac{3\pi}{4}$, την τιμή $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$
- ▹ τοπικό μέγιστο για $x = \pi$, την τιμή $f(\pi) = 0$

- $\Delta_1 = [-1\ ,\ 0]$

  Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

  $$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 1 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = [0\ ,\ 1]$$

- $\Delta_2 = \left(0, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

  Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = \left(0\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$$

- $\Delta_3 = \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$

  Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_3

  $$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \\ f(\pi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_3) = \left[0\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι

$$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \overset{(*)}{=} \left[0\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} * \ \sqrt{2} > 1 \\ \dfrac{3\pi}{4} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} > e \Rightarrow \dfrac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} > \dfrac{e}{2} > 1 \end{array}\right\} \overset{(x)}{\Rightarrow} \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} > 1$$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = g(x) - f(x)$, $x \in [0, \pi]$.

$\varphi(x) = e^{5x} - e^{x} \cdot ημx = e^{x} \cdot (e^{4x} - ημx)$

Για $x \in [0, \pi]$ είναι $ημx \le 1 \le e^{4x}$, άρα $\varphi(x) \ge 0$

$$E = \int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\pi} (e^{5x} - e^{x} \cdot ημx)\,dx = \int_0^{\pi} e^{5x}\,dx - \int_0^{\pi} e^{x} \cdot ημx\,dx$$

- $$\int_0^{\pi} e^{5x}\,dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{1}{5} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5}$$

- $$I = \int_0^{\pi} e^{x} \cdot ημx\,dx = \int_0^{\pi} (e^{x})' \cdot ημx\,dx = [e^{x} \cdot ημx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{x} \cdot (ημx)'\,dx$$

$$= 0 - 0 - \int_0^{\pi} e^{x} \cdot συνx\,dx = -\int_0^{\pi} (e^{x})' \cdot συνx\,dx$$

$$= -[e^{x} \cdot συνx]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{x} \cdot (συνx)'\,dx = e^{\pi} + 1 + \int_0^{\pi} e^{x} \cdot (-ημx)\,dx$$

$$= e^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{x} \cdot ημx\,dx = e^{\pi} + 1 - I$$

Είναι $I = e^{\pi} + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow I = \dfrac{e^{\pi} + 1}{2}$

$$E = \int_0^{\pi} e^{5x}\,dx - \int_0^{\pi} e^{x} \cdot ημx\,dx$$

$$= \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

$$= \frac{2e^{5\pi} - 2}{10} - \frac{5e^{\pi} + 5}{10}$$

$$= \frac{2e^{5\pi} - 5e^{\pi} - 7}{10} \text{ τ.μ.}$$

Δ4. $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{16f(x)}{e^{\frac{3\pi}{4}}} - \frac{(4x-3\pi)^2}{e^{\frac{3\pi}{4}}} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$16f(x) - \left[4\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)\right]^2 = 8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$16f(x) - 16\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = 8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}}{16} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$, άρα $f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \le 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$ (1)

Είναι $\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \ge 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$ (2)

Από (1) και (2) για να ισχύει η ισότητα, πρέπει $x = \frac{3\pi}{4}$.

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = \frac{3\pi}{4}$.