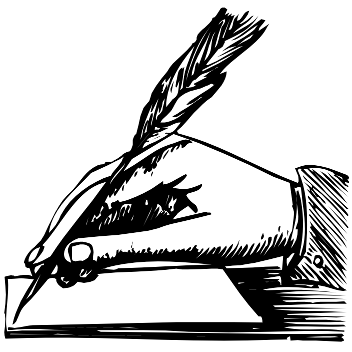
mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Δευτέρα 11 Ιουνίου 2018

Λύσεις
των
θεμάτων



Έκδοση 2η (12/06/2018, 14:30)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=61997

Συνεργάστηκαν οι:

Αντωνέας Στράτης, Βαρβεράκης Ανδρέας, Κακαβάς Βασίλης,
Καλαθάκης Γιώργος, Καλδή Φωτεινή, Καρδαμίτσης Σπύρος,
Κατσίπης Νίκος, Κούτρας Στάθης, Μάγκος Θάνος, Μαυρογιάννης Νίκος,
Μουρούκος Βαγγέλης, Μπεληγιάννης Αθανάσιος, Μπόρης Ροδόλφος,
Παπαγρηγοράκης Μίλτος, Πρωτοπαπάς Λευτέρης, Ρίζος Γιώργος,
Στεργίου Μπάμπης, Στόγιας Σωτήρης, Συγκελάκης Αλέξανδρος,
Συνεφακόπουλος Αχιλλέας, Τηλέγραφος Κώστας,
Τσιφάκης Χρήστος, Χασάπης Σωτήρης

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι $''1-1''$ είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x)=ημx$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-συνx}{x}=0$

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C'των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο, σελ. 99

Α2. α. Ψευδής.

β. Χρησιμοποιούμε αντιπαράδειγμα. Π.χ. θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν } x>0 \end{cases}$

η οποία είναι 1 – 1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Οι δυνατές περιπτώσεις είναι

$$x_1=\frac{1}{x_2},\ \frac{1}{x_1}=x_2,\ x_1=x_2,\ \frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}$$

Οι δύο πρώτες αποκλείονται λόγω προσήμων και από τις δύο τελευταίες προκύπτει ότι $x_1=x_2$.

Παραγωγίζοντας στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ βρίσκουμε ότι $f'(x)=1>0$ και $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ επομένως στο πρώτο διάστημα η f είναι γνησίως αύξουσα και στο δεύτερο γνησίως φθίνουσα. Άρα στο πεδίο ορισμού της η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

ΣΧΟΛΙΟ: *Η παρακάπω δικαιολόγηση του αντιπαραδείγματος δεν κρίνεται απαραίτητη για την βαθμολόγηση της απάντησης των μαθητών, εφόσον δεν περιλαμβάνεται στο σχολικό βιβλίο.*

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4. **α)** Λάθος
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει).

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Για $x\neq 0$ έχουμε

$$f'(x)=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}$$

Είναι

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x^3+8}{x^3}>0\Leftrightarrow x^3(x+2)(x^2-2x+4)>0$$

Επειδή $x^2-2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$x^3(x+2)>0\Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } x>0$$

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0)$. Επιπλέον η συνάρτηση για $x=-2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(-2)=-3$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-3	$\searrow$	‖	$\nearrow$	

Β2. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη για $x\neq 0$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=\left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)'=\frac{(x^3+8)'x^3-(x^3+8)(x^3)'}{x^6}=\frac{3x^2x^3-(x^3+8)3x^2}{x^6}=\frac{3\cancel{x^2}(x^3-x^3-8)}{x^{\cancel{6}4}}=-\frac{24}{x^4}<0$$

Επομένως είναι κοίλη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Επιπλέον δεν έχει σημεία καμπής.

Β3. Στα $x_0\neq 0$ η f είναι συνεχής και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για το $x_0=0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$.

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x=0$.

Αναζητούμε ***ασύμπτωτες*** στο $+\infty$ με εξίσωση μορφής $y=\lambda x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0=\beta$$

Επομένως η ευθεία με εξίσωση $y=\lambda x+\beta \Rightarrow y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Αναζητούμε ***ασύμπτωτες*** στο $-\infty$ με εξίσωση μορφής $y=\lambda x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$$

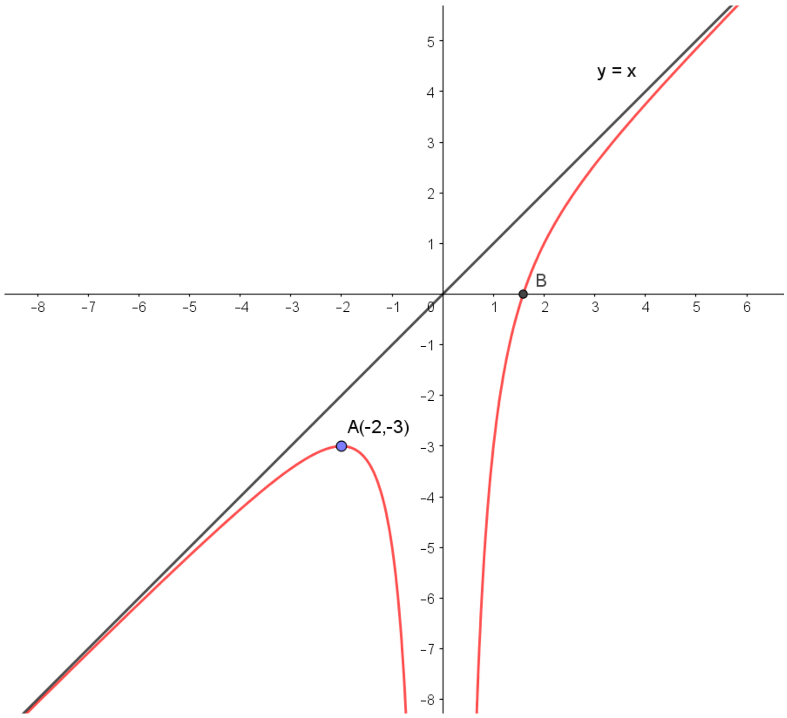
και

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0=\beta$$

Επομένως η ευθεία με εξίσωαη $y=\lambda x+\beta \Rightarrow y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$.

B4.

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f . Η C_f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Β με τετμημένη $\sqrt[3]{4}\simeq 1{,}6$.



ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους $x\text{m}$, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\ ,\ x\in(0,8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5m^2.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ:

Γ1. Έστω x m, $x\in(0,8)$ το μήκος του σύρματος που θα χρησιμοποιηθεί για το τετράγωνο και $8-x$ m θα είναι το μήκος που θα χρησιμοποιηθεί για τον κύκλο.

Η πλευρά τετραγώνου είναι $\alpha=\frac{x}{4}$ m.

Το μήκος $L=2\pi R$ του κύκλου είναι ίσο με $8-x$ m οπότε έχουμε $2\pi R=8-x \Leftrightarrow R=\frac{8-x}{2\pi}$.

Η ακτίνα του κύκλου είναι λοιπόν ίση με $R=\frac{8-x}{2\pi}$ m, $x\in(0,8)$.

Συνεπώς η συνάρτηση του αθροίσματος των εμβαδών θα είναι:

$$E(x)=\alpha^2+\pi R^2=\frac{x^2}{16}+\pi\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ \text{με } x\in(0,8).$$

Γ2. Η συνάρτηση $E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, που δίνει το ολικό εμβαδό, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ με

$$E'(x)=\left(\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\right)'=\frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)x^2-64x+256\right]'=$$

$$=\frac{1}{16\pi}\left[2(\pi+4)x-64\right]=\frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]$$

Ισχύει ότι $E'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]=0\Leftrightarrow(\pi+4)x-32=0\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$.

και $E'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]>0\Leftrightarrow(\pi+4)x-32>0\Leftrightarrow x>\frac{32}{\pi+4}$.

Συνεπώς, η συνάρτηση E(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$.

Οπότε η συνάρτηση E(x) έχει ελάχιστο στη θέση $x=\dfrac{32}{\pi+4}$.

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
E′(x)		−	0	+	
E(x)		↘		↗	

Η πλευρά του τετραγώνου γίνεται ίση με τη διάμετρο όταν $\dfrac{x}{4}=\dfrac{8-x}{\pi}\Leftrightarrow x=\dfrac{32}{\pi+4}$, που είναι η τιμή για την οποία η E(x) έχει ελάχιστο.

Άρα, όταν η πλευρά του τετραγώνου γίνεται ίση με την διάμετρο του κύκλου, τότε το άθροισμα των εμβαδών ελαχιστοποιείται .

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x)=\dfrac{16}{\pi}$.

Η E(x) είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$, οπότε το σύνολο τιμών της στο A_1 είναι το $\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\ \lim\limits_{x\to 0^+}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},\dfrac{16}{\pi}\right)$.

Είναι

- $\dfrac{16}{\pi+4}<5\Leftrightarrow 16<5\pi+20\Leftrightarrow -4<5\pi$ που ισχύει ,
- $5<\dfrac{16}{\pi}\Leftrightarrow 5\pi<16\Leftrightarrow \pi<\dfrac{16}{5}=3{,}2$ που ισχύει ,

άρα υπάρχει ένα μοναδικό $x_0\in A_1$, τέτοιο ώστε $E(x_0)=5$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 8^-}E(x)=4$.

Η E(x) είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$,οπότε το σύνολο τιμών της στο A_2 είναι το $\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\ \lim\limits_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},4\right)$, οπότε δεν υπάρχει $x\in A_2$ τέτοιο ώστε E(x) = 5.

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,8)$ τέτοιο ώστε $E(x_0)=5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-\frac{32}{15}$$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ:

Δ1. Η συνάρτηση f με $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$ και $\alpha>1$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους $2e^{x-\alpha}$ (παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $x-\alpha$ που είναι πολυωνυμική και της $2e^x$, που είναι γινόμενο εκθετικής με σταθερά) και x^2 (παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική) με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$. Οπότε είναι και συνεχής.

Επίσης η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με τύπους $x-\alpha$ που είναι πολυωνυμική και της $2e^{x-\alpha}$ (παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $2e^x$ που είναι γινόμενο εκθετικής με σταθερά) και $2x$ (παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική) με $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$.

Τότε:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2=0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}=2\Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1\Leftrightarrow x-\alpha=0\Leftrightarrow x=\alpha\,,$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2>0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}>2\Leftrightarrow e^{x-\alpha}>1\Leftrightarrow x-\alpha>0\Leftrightarrow x>\alpha$$

και

$$f''(x)<0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2<0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}<2\Leftrightarrow e^{x-\alpha}<1\Leftrightarrow x-\alpha<0\Leftrightarrow x<\alpha\,,$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		Σ.Κ.	

Από το πρόσημο της $f''(x)$ που φαινεται στον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,\alpha]$ και είναι κυρτή στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$ και αφού $f''(\alpha)=0$ παρουσιάζει καμπή στο $x_0=\alpha$, δηλαδή η C_f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha))$ δηλαδή το $(\alpha, 2-\alpha^2)$.

Δ2. Έχουμε ότι:

- $f'(\alpha)=2e^{\alpha-\alpha}-2\alpha=2-2\alpha$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x-\alpha}-2x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x-\alpha})=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$

και

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-\alpha}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2e^{x-\alpha}\left(1-\frac{x}{2e^{x-\alpha}}\right)\right]=+\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-\alpha})=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-a}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-\alpha}}=0$ (αφού τηρούνται οι προυποθέσεις του θεωρήματος De L' Hospital).

Από το Δ1 αποδείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$ και κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$.

Η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1=(-\infty,\alpha]$ οπότε $f'(A_1)=\left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$.

Η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1=[\alpha,+\infty)$ οπότε $f'(A_2)=\left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$.

Αφού $\alpha>1 \Leftrightarrow -2\alpha<-2 \Leftrightarrow 2-2\alpha<0$,

οπότε $0\in f'(A_1), 0\in f'(A_2)$ και γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα A_1, A_2,

οπότε η $f'(x)=0$ έχει από μία ακριβώς ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1, A_2, έστω $x_1\in A_1, x_2\in A_2$.

Συνεπώς:

Για κάθε $x\in(-\infty,x_1]$ έχουμε :

$x<x_1 \Rightarrow f'(x)>f'(x_1) \Rightarrow f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,x_1]$,

Για κάθε $x\in[x_1,\alpha]$ έχουμε :

$x_1<x<\alpha \Rightarrow f'(x)<f'(x_1) \Rightarrow f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,\alpha]$,

Για κάθε $x\in[\alpha,x_2]$ έχουμε :

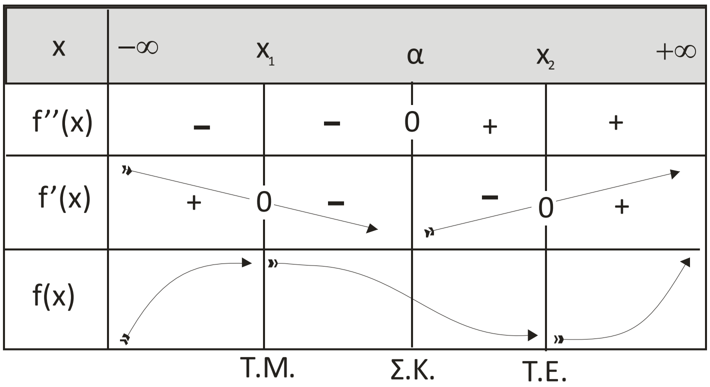
$\alpha<x<x_2 \Rightarrow f'(x)<f'(x_2) \Rightarrow f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,x_2]$,

Για κάθε $x\in[x_2,+\infty)$ έχουμε :

$x>x_2 \Rightarrow f'(x)>f'(x_2) \Rightarrow f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2,+\infty)$.

Επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο α, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$.

Συνεπώς η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό μέγιστο για $x_1 \in (-\infty, \alpha]$ και μοναδικό τοπικό ελάχιστο για $x_2 \in [\alpha, +\infty)$.



Δ3. Επειδή $f'(x_1) = 0 \Rightarrow e^{x_1 - \alpha} - x_1 = 0 \Rightarrow e^{x_1 - \alpha} = x_1$. Αλλά $x_1 < \alpha \Rightarrow x_1 - \alpha < 0 \Rightarrow e^{x_1 - \alpha} < 1 \Rightarrow x_1 < 1$.
Ισχύει ότι $x_1 < 1 < \alpha < x_2$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$, οπότε $f(1) > f(\alpha) > f(x_2)$, άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4. Για α = 2 είναι $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ και $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$.
Η εφαπτομένη της C_f στο Α(2,-2) έχει εξίσωση $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.
Αφού f(2) = -2, $f'(2) = -2$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται $y = -2x + 2$.
Λόγω της κυρτότητας της f στο $[2, +\infty)$ είναι $f(x) \geq -2x + 2$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 2.
Άρα για κάθε $x \in [2, +\infty]$ είναι $f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) \geq -2(x-1)$.

Τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης, με $\sqrt{x-2} \geq 0$ στο $[2, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x)\sqrt{x-2} \geq -2(x-1)\sqrt{x-2} \text{ και το ίσον ισχύει μόνο για } x = 2.$$

Τότε ισχύει

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}\,dx.$$

Στο ολοκλήρωμα $I = \int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}\,dx$ θέτουμε u = x-2 οπότε είναι du = dx, οπότε είναι x - 1 = u + 1.
Τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται

x	u = x - 2
$x_1 = 2$	$u_1 = 0$
$x_2 = 3$	$u_2 = 1$

$$I=\int_0^1 -2(u+1)\sqrt{u}du=-2\int_0^1\left(u\sqrt{u}+\sqrt{u}\right)du=-2\int_0^1\left(u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)du=$$

$$=-2\left[\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=-2\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=-4\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1=-4\left[\left(\frac{1^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\left(\frac{1^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{0^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right]=,$$

$$=-4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=-4\frac{3+5}{15}=-\frac{32}{15}$$

οπότε είναι $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>-\frac{32}{15}$.

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

B3. Είναι $f(x)-x=-\frac{4}{x^2}$ κι επειδή

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0\,.$$

Επομένως η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f τοσο στο $+\infty$ όσο και στο $-\infty$.

Γ2. Η πλευρά του τετραγώνου γίνεται ίση με τη διάμετρο όταν $\frac{x}{4}=\frac{8-x}{\pi}\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$.

Η f είναι τριώνυμο με $\alpha=\frac{\pi+4}{16\pi}>0$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}=32\pi+4$ το οποίο φανερά ανήκει στο (0, 8) και το οποίο είναι και το ζητούμενο x για το οποίο η πλευρά του τετραγώνου γίνεται ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ2. (Με ύλη Β΄ Λυκείου)

Θεωρώ τα διανύσματα $\vec{u}=\left(\frac{x}{2},\frac{8-x}{2\sqrt{\pi}}\right)$, $\vec{v}=\left(2,2\sqrt{\pi}\right)$.

Τότε (από τη Β' Λυκείου είναι γνωστό ότι)

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\geq\vec{u}\cdot\vec{v}\quad\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{4}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}\right)\left(4+4\pi\right)\geq\left(x+8-x\right)^2=64$$

συνεπώς $E(x)\geq\frac{64}{4+4\pi}$ με το ίσον να ισχύει όταν τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι ομμόροπα, δηλαδή όταν

$$\frac{(8-x)/2\sqrt{\pi}}{x/2}=\frac{2\sqrt{\pi}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}.$$

Η πλευρά τετραγωνου είναι το $\frac{x}{4}$, διάμετρος του κύκλου το $\frac{8-x}{\pi}$, που προκύπτουν ίσες για την τιμή του x που βρήκαμε.

Γ3. Μελετάμε τη γενίκευση της συνάρτησης $E(x)$ στο διάστημα [0, 8].

Είναι $E(0)=\frac{16}{\pi}$ και $\pi<3,2 \Leftrightarrow \frac{16}{\pi}>\frac{16}{3,2}=5 \Leftrightarrow E(0)>5$.

Επίσης είναι $E(8)=4$.

Οπότε, αφού η συνάρτηση $E(x)$ είναι συνεχής ως πράξη συνεχών, γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right]$, θα υπάρχει ένα μοναδικό x_0 στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$, τέτοιο ώστε $E(x_0)=5$.

Γ3. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,8)$.
Είναι

$$\begin{aligned} E(x)=5 &\Leftrightarrow \frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=5 \\ &\Leftrightarrow (\pi+4)x^2-64x+256=80\pi \\ &\Leftrightarrow (\pi+4)x^2-64x+256-80\pi=0 \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \Delta &= 64^2-4(\pi+4)(256-80\pi)= \\ &=64^2-64(\pi+4)(16-5\pi)=64(5\pi^2+4\pi)>0. \end{aligned}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$x=\frac{64\pm\sqrt{64(5\pi^2+4\pi)}}{2(\pi+4)}=\frac{64\pm 8\sqrt{5\pi^2+4\pi}}{2(\pi+4)}=\frac{32\pm 4\sqrt{5\pi^2+4\pi}}{\pi+4}$$

Όμως η $x=\frac{32+4\sqrt{5\pi^2+4\pi}}{\pi+4}>8$ αφού

$$32+4\sqrt{5\pi^2+4\pi}>8\pi+32 \Leftrightarrow \sqrt{5\pi^2+4\pi}>2\pi \Leftrightarrow 5\pi^2+4\pi>4\pi^2 \Leftrightarrow \pi^2+4\pi>0$$

Ακόμα $x=\frac{32-4\sqrt{5\pi^2+4\pi}}{\pi+4}<8$ αφού $32-4\sqrt{5\pi^2+4\pi}<8\pi+32 \Leftrightarrow 2\pi+\sqrt{5\pi^2+4\pi}>0$

και $x=\frac{32-4\sqrt{5\pi^2+4\pi}}{\pi+4}>0$ αφού $32>4\sqrt{5\pi^2+4\pi}>0 \Leftrightarrow 5\pi^2+4\pi-64<0$.

Πράγματι, το τριώνυμο $g(t)=5t^2+4t-64$ είναι αρνητικό όταν $-4<t<3,2$ και το π ανήκει σ' αυτό το διάστημα.

Γ3. Η συνάρτηση $g(x)=E(x)-5$ είναι τριώνυμο οπότε έχει το πολύ 2 ρίζες. Η g είναι συνεχής στο [0,8] ως πράξη συνεχών και:

$$g(0)=E(0)-5=\frac{(\pi+4)0^2-64\cdot 0+256}{16\pi}-5=\frac{256}{16\pi}-5=\frac{256-80\pi}{16\pi}-5>0$$

$$g(8) = E(8) - 5 = \frac{(\pi+4)8^2 - 64\cdot 8 + 256}{16\pi} - 5 = \frac{64\pi + 256 - 512 + 256}{16\pi} - 5 = \frac{64\pi}{16\pi} = 4 - 5 = -1 < 0$$

$$g(10) = E(0) - 5 = \frac{(\pi+4)\cdot 10^2 - 64\cdot 10 + 256}{16\pi} - 5 = \frac{100\pi + 400 - 640 + 256}{16\pi} - 5 = \frac{20\pi + 16}{16\pi} > 0$$

Από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,8) και μια τουλάχιστον ρίζα στο (8,10).

Όπως αναφέραμε, η $g(x) = E(x) - 5$ είναι τριώνυμο, οπότε θα έχει μοναδική λύση στο $(0,8)$

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = \dfrac{f'(x)}{2} = e^{x-a} - x$ για $x \in \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι η $g'(x) = \dfrac{f''(x)}{2}$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = \alpha$.

Μάλιστα, η g είναι γνησίως φθίνουσα για x < α και γνησίως αύξουσα για x > α.
Επιπλέον, είναι

$g(-\alpha) = e^{-2\alpha} + \alpha > 0$, $g(1) = e^{1-\alpha} - 1 < 0$, $g(\alpha) = 1 - \alpha < 0$ και $g(b) > 0$, όπου $b > a$ είναι τέτοιο ώστε $e^{b-\alpha} > b$. (Η ύπαρξη του b έπεται από το ότι $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.).

Αλλιώς για την ύπαρξη του b:

Η συνάρτηση h με $h(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ έχει $h'(x) = \dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$ κι άρα είναι αύξουσαστο $\mathbb{R}$ με

$$h(x) \geq h(0) = 1 \text{ για } x \geq 0.$$

Έτσι, είναι $e^x \geq x^2 + 1$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε

$$e^{b-\alpha} \geq (b-\alpha)^2 + 1 = b(b-2\alpha) + \alpha^2 + 1 > b \quad \text{για} \quad b \geq 2\alpha + 1.$$

Από Θ. Bolzano υπάρχουν $x_1 \in (-\alpha, 1)$ και $x_2 \in (\alpha, b)$ τέτοια ώστε $g(x_1) = 0 = g(x_2)$.

Από την μονοτονία της g στα διαστήματα $(-\infty, \alpha)$ και $(\alpha, +\infty)$ έπεται η μοναδικότητα των x_1, x_2 και το ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2, αφού η g θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, x_1)$ (θετικό), (x_1, x_2) (αρνητικό) και (x_2, ∞) (θετικό).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗	Τ. Μ	↘	Τ. Ε.	↗	

Δ3. Έστω ότι υπήρχε c με $\alpha < c < x_2$ τέτοιο ώστε $f(c) = f(1)$. Από Θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (1,c)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή $g(\xi) = 0$. Αφού $\xi < x_2$, αναγκαστικά θα είναι $\xi = x_1$, άτοπο, αφού $x_1 < 1 < \xi$, όπως έχουμε αποδείξει στο Δ2.

Δ3. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_2) αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(1) > f(\alpha) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0.$$

Πράγματι από τη γνωστή ανισότητα $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού το $1 - \alpha < 0$ ισχύει :

$$2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 2(1 - \alpha + 1) + \alpha^2 - 3 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 > 0$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Δ3. Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 = 2\left(e^{1-\alpha} - 1\right) < 0$, αφού $1 - \alpha < 0 \Rightarrow e^{1-\alpha} < 1$.

Άρα, θα είναι $1 \in (x_1, x_2)$ κι αφού $1 < \alpha$, θα είναι $1 \in (x_1, \alpha)$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, στο (x_1, x_2), οπότε η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει τη μοναδική λύση $x = 1$ στο (x_1, x_2). Αφού, όμως $1 \in (x_1, \alpha)$, έχουμε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι ***αδύνατη*** στο διάστημα (α, x_2).

Δ3. Παρατηρούμε όπως πριν ότι $f'(1) < 0$. Έστω ότι υπήρχε $\rho \in (\alpha, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = f(1)$. Με εφαρμογή του Θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $[1, \rho]$, θα υπήρχε ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, \rho)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί $(1, \rho) \subset (x_1, x_2)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Συνεπώς, η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι ***αδύνατη*** στο διάστημα (α, x_2).

Δ3. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (α, x_2), θα είναι

$$f\left((\alpha, x_2)\right) = \left(f(x_2), f(\alpha)\right).$$

Για να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2), αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(1) > f(\alpha).$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι $\quad 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2$.

Θέτοντας $x = 1 - \alpha$ στη βασική ανισότητα $e^x \geq x + 1$ (με το ίσον μόνο αν $x = 0$) έχουμε ότι:

$$e^{1-\alpha} > 1 - \alpha + 1 = 2 - \alpha,$$

οπότε $\quad 2e^{1-\alpha} - 1 > 2(2 - \alpha) - 1 = 3 - 2\alpha$.

Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$3 - 2\alpha > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 > 0,$$

που ισχύει και άρα το ζητούμενο δείχθηκε.