ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄
20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολ. βιβλίο σελ. 31.

Α2. Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνον όταν το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Α3. Ορισμός, σχολ. βιβλίο σελ. 86-87.

Α4. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$ είναι

$\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right\}$, με $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$.

Επειδή $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq\mathrm{A}\subseteq\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ έπεται $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le\mathrm{P}(\mathrm{A})\le\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ και επειδή οι πιθανότητες $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}),\ \mathrm{P}(\mathrm{A}),\ \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ είναι διαφορετικές ανά δύο μεταξύ τους, προκύπτει ότι

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})<\mathrm{P}(\mathrm{A})<\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

Έτσι προκύπτει $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{1}{4},\mathrm{P}(\mathrm{A})=\dfrac{1}{3},\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\dfrac{1}{2}$.

Β2. $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{B})=\dfrac{5}{12}$.

Για το ενδεχόμενο Α΄–Β΄ είναι:

$\mathrm{A}'-\mathrm{B}'=\mathrm{A}'\cap(\mathrm{B}')'=\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}=\mathrm{B}-\mathrm{A}$.

Άρα $\mathrm{P}(\mathrm{A}'-\mathrm{B}')=\mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}-\dfrac{3}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

Το ενδεχόμενο Δ ισούται με $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'$, οπότε

$\mathrm{P}(\Delta)=\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'\right]=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

B3. Το ενδεχόμενο Ε ισούται με $(A-B)\cup(B-A)$ οπότε

$$P(E)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ .$$

B4. Η εξίσωση $9x^2-3x-2=0$, έχει ρίζες $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{1}{3}$. Άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

Αν τα ενδεχόμενα Β, Γ ήταν ασυμβίβαστα θα ήταν

$P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=P(\mathrm{B})+P(\Gamma)\Leftrightarrow P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=\frac{2}{3}+\frac{5}{12}\Leftrightarrow P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=\frac{13}{12}>1$, άτοπο.

Άρα τα Β, Γ δεν μπορεί να είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τα δεδομένα προκύπτει $f_1\%=10$ και $f_5\%=30$. Επίσης είναι

$$f_3=\frac{108}{360}=0,3$$

Άρα $f_3\%=30$

Τα κέντρα των κλάσεων είναι $x_1=9,\ \ x_2=11,\ \ x_3=13,\ \ x_4=15,\ \ x_5=17$.

Από τον τύπο $\overline{x}=\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot f_i$ προκύπτει

$$14=9\cdot 0,1+11\cdot f_2+13\cdot 0,3+15\cdot f_4+17\cdot 0,3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14=11\cdot f_2+15\cdot f_4+9.9\Leftrightarrow 11\cdot f_2+15\cdot f_4=4,1\quad (1)$$

Επίσης είναι

$$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+1\Leftrightarrow 0,1+f_2+0,3+f_4+0,3=1\Leftrightarrow f_2+f_4=0.3\quad (2).$$

Από το σύστημα των (1), (2) : $\begin{pmatrix}11f_2+15f_4=4,1\\ f_2+f_4=0,3\end{pmatrix}$ προκύπτει $f_2=0,1$ και $f_4=0,2$.

Άρα $f_2\%=10$ και $f_4\%=20$.

Κλάσεις	f_1 %
[8, 10)	10
[10, 12)	10
[12, 14)	30
[14, 16)	20
[16, 18)	30

Γ2. Από τον τύπο $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{S}(x_i-\overline{x})^2v_i$

προκύπτει $S^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{v_i}{v}(x_i-\overline{x})^2\Leftrightarrow S^2=\sum_{i=1}^{5}f_i\,(x_i-\overline{x})^2$.

Έτσι $S^2=f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+f_3(x_3-\overline{x})^2+f_4(x_4-\overline{x})^2+f_5(x_5-\overline{x})^2=$

$= 0,1(9-14)^2 + 0,1(11-14)^2 + 0,3(13-14)^2 + 0,2(15-14)^2 + 0,3(17-14)^2 =$

$= 0,1 \cdot 25 + 0,1 \cdot 9 + 0,3 + 0,2 + 0,9 \cdot 9 = 2,5 + 0,9 + 0,3 + 0,2 + 2,7 = 6,6.$

$S^2 = 6,6$ άρα $S = \sqrt{6,6} \simeq 2,57.$

Ισχύει ότι $CV = \dfrac{S}{|\overline{x}|} = \dfrac{2,57}{14} \approx 0,18 > 0,1.$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Ισχύει ότι $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} \nu_i \cdot x_i}{\nu} \Leftrightarrow \overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} \nu_i \cdot x_i + \nu_5 \cdot x_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \dfrac{1780 + f_5 \cdot \nu \cdot x_5}{\nu} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14 \cdot \nu = 1780 + 0,3 \cdot \nu \cdot 17 \Leftrightarrow 14 \cdot \nu - 5,1 \cdot \nu = 1780 \Leftrightarrow 8,9 \cdot \nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = \dfrac{1780}{8,9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nu = 200$

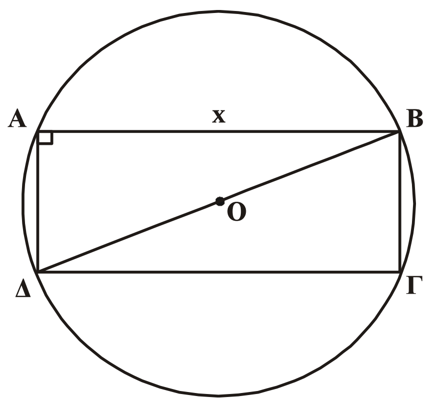
Γ4. Από την εφαρμογή της σελ 99 του σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι αν δυο μεταβλητές x, y συνδέονται με τη σχέση $Y = \alpha X + \beta$ όπου α, β $\in \mathbb{R}$, τότε $\overline{y} = a\overline{x} + \beta$ και $S_y = |a| S_x$.

Από το δεδομένο $\beta_i = \dfrac{a_i - \overline{a}}{S_a} \Leftrightarrow \beta_i = \dfrac{1}{S_a} a_i - \dfrac{\overline{a}}{S_a}$, προκύπτει ότι οι μεταβλητές α, β συνδέονται με τη σχέση $\beta = \dfrac{1}{S_a} a - \dfrac{\overline{a}}{S_a}$.

Άρα $\overline{\beta} = \dfrac{1}{S_a} \overline{a} - \dfrac{\overline{a}}{S_a} = 0$ και $S_\beta = \left| \dfrac{1}{S_a} \right| S_a = \dfrac{1}{S_a} S_a = 1.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Το τμήμα ΑΒ= x , είναι χορδή του κύκλου, άρα $0 < x < 2 \cdot \rho \Leftrightarrow 0 < x < 10$.

Η γωνία ΔΑΒ είναι ορθή, άρα η χορδή ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

Έτσι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι ΑΒ= x, ΒΔ= 10 και άρα
$A\Delta = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - x^2}$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $AB \cdot A\Delta = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = f(x)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,10) με

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50}$ ή $x = -\sqrt{50}$.

Επειδή $x \in (0,10)$ προκύπτει $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολής.

x	0 $\quad$ $5\sqrt{2}$
f ΄	+ $\quad$ 0 $\quad$ -
f	↗ τ.μέγιστο ↘

Συμπεραίνουμε ότι για την τιμή $x = 5\sqrt{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο. Για την τιμή αυτή είναι $A\Delta = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50}$, δηλ. ΑΔ = ΑΒ, οπότε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. Παρατηρούμε ότι $\sqrt{99} = 1 \cdot \sqrt{100 - 1^2} = f(1)$.

Έτσι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} = \frac{1}{98} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} =$

$$= \frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{100 - 2 \cdot 1^2}{\sqrt{100 - 1^2}} = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}.$$

Δ4. Είναι $A - B \subseteq A$, άρα $P(A-B) \le P(A)$ και επειδή $P(A-B) > 0$, $P(A) \le 1$ είναι: $0 < P(A-B) \le P(A) \le 1 < 5\sqrt{2}$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2})$ άρα

$$f\left[P(A-B)\right] \le f\left[P(A)\right] \Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100 - P^2(A-B)} \le P(A)\sqrt{100 - P^2(A)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \quad (1).$$

Είναι $0 \le P\left(A-B\right) \le 1$, άρα

$$P^2\left(A-B\right) \le 1 \Leftrightarrow$$

$$-P^2\left(A-B\right) \ge -1 \Leftrightarrow 100-P^2\left(A-B\right) \ge 99 \Leftrightarrow \sqrt{100-P^2\left(A-B\right)} \ge \sqrt{99} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{100-P^2\left(A-B\right)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Επειδή $0 \le P\left(A\right) \le 1$ και

$0 \le \frac{1}{\sqrt{100-P^2\left(A-B\right)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}$, προκύπτει $\frac{P\left(A\right)}{\sqrt{100-P^2\left(A-B\right)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}} < 1$.

Τελικά $\frac{P\left(A-B\right)}{\sqrt{100-P^2\left(A\right)}} \le \frac{P\left(A\right)}{\sqrt{100-P^2\left(A-B\right)}} < 1$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,5\sqrt{2}\right)$ άρα

$$f\left(\frac{P\left(A-B\right)}{\sqrt{100-P^2\left(A\right)}}\right) \le f\left(\frac{P\left(A\right)}{\sqrt{100-P^2\left(A-B\right)}}\right).$$