ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄
23 ΜΑΪΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 31 σχολ. βιβλίου.
Α2. Θεωρία, σελ. 148 σχολ. βιβλίου.
Α3. Θεωρία, σελ. 96 σχολ. βιβλίου.
Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων, από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων θα είναι δ = 25.

Β2. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% και είναι δ = 25 θα είναι

$$\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha + 3\alpha - 2\alpha - \alpha = -4 + 6 + 8 - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Άρα ο πίνακας συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων θα είναι

χρόνος (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5-15)	10	12	20	12	20
[15-25)	20	18	30	30	50
[25-35)	30	24	40	54	90
[35-45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Β3.

Είναι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} v_i x_i}{v} = \dfrac{10 \bullet 12 + 20 \bullet 18 + 30 \bullet 24 + 40 \bullet 6}{60} = \dfrac{1440}{60} = 24$ λεπτά.

Επίσης $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} v_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{v} = \dfrac{v_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2 + v_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2 + v_3\left(x_3-\bar{x}\right)^2 + v_4\left(x_4-\bar{x}\right)^2}{v} =$

$$= \frac{12(10-24)^2 + 18(20-24)^2 + 24(30-24)^2 + 6(40-24)^2}{60} =$$

$$\frac{12 \cdot 195 + 18 \cdot 16 + 24 \cdot 36 + 6 \cdot 256}{60} = \frac{5040}{60} = \frac{504}{6} = 84 \text{ λεπτά.}$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $S=\sqrt{s^2}=\sqrt{84}\simeq 9{,}17$

Β4.

Από 35 έως 45 έχουμε το 10% των παρατηρήσεων και έστω x% το ποσοστό των παρατηρήσεων από 37 έως 45 . Τότε θα είναι:

$$\frac{45-35}{45-37}=\frac{10}{x}\Leftrightarrow\frac{10}{8}=\frac{10}{x}\Leftrightarrow 10x=80\Leftrightarrow x=8\%.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν Γ και Ι είναι τα ενδεχόμενα ένας μαθητής να μαθαίνει αντίστοιχα Γαλλικά, Ισπανικά, τότε είναι:

$$P(\Gamma\cup\mathrm{I})=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)}=1.$$

Άρα το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει τουλάχιστον μια από τις 2 γλώσσες είναι βέβαιο.

Γ2. Είναι $P(\Gamma)=\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(I)=\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma\cap\mathrm{I})=\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma\cup\mathrm{I})=1$.

Όμως $P(\Gamma\cup\mathrm{I})=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap\mathrm{I})$, άρα:

$$1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow\nu^2+1=3\nu+\nu+2-\nu-1\Leftrightarrow\nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow\nu=0\quad ή\quad\nu=3.$$

Επειδή $\nu\in\mathrm{N}^*$ προκύπτει $\nu=3$.

Γ3. Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες είναι το: $(P-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)$.

Είναι $P((\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma))=P(\Gamma)+P(\mathrm{I})-2P(\Gamma\cap\mathrm{I})=\dfrac{9}{10}+\dfrac{5}{10}-2\cdot\dfrac{4}{10}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

Γ4. $P(\Gamma\cap\mathrm{I})=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$. Όμως $P(\Gamma\cap\mathrm{I})=\dfrac{\mathrm{N}(\Gamma\cap\mathrm{I})}{\mathrm{N}(\Omega)}$.

Έτσι $\dfrac{\mathrm{N}(\Gamma\cap\mathrm{I})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\dfrac{2}{5}\Leftrightarrow\dfrac{32}{\mathrm{N}(\Omega)}=\dfrac{2}{5}\Leftrightarrow\mathrm{N}(\Omega)=80$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \left(\frac{1+\ln^2 x}{x}\right)' = \frac{x\left(2\frac{1}{x}\ln x\right) - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2\ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2} =$$

$$-\frac{\ln^2 x - 2\ln x + 1}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2}$$

Επειδή είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$, $f(e) = 0$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΛΜΚ είναι: $E(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \dfrac{1+\ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x$.

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$E'(x) = (1+\ln^2 x) = 2\ln x(\ln x)' = \frac{2\ln x}{x}.$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$E(1) = 1 \cdot \dfrac{1+\ln^2 \cdot 1}{1} = 1$. Για την τιμή $x = 1$, έχουμε $f(1) = 1$, επομένως (ΟΛ) = (ΟΚ), οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3. Επειδή η ευθεία ε: $y = \lambda x + b$ είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$, θα είναι: $\lambda = f'(1) = -1$.

Έτσι έχουμε: $y = -x + \beta$, με $\beta \neq 10$.

Επειδή η μέση τιμή των παρατηρήσεων x_i είναι $\bar{x} = 10$ και $y_i = (-1)x + \beta$ προκύπτει ότι:

$$\bar{y} = -10 + \beta \text{ και } S_y = |-1| \cdot S_x = 2$$

Για να είναι το δείγμα των παρατηρήσεων y_i με $i = 1,2 \ldots, 10$ ομοιογενές θα πρέπει: $\dfrac{S_y}{|\bar{y}|} \leq 0{,}1$.

$$\frac{S_y}{|\bar{y}|} \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{|-\bar{x}+\beta|} \le \frac{10}{100} \Leftrightarrow |-\bar{x}+\beta| \ge 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-10+\beta| \ge 20 \Leftrightarrow \left(-10+\beta \le 20 \text{ ή } -10+\beta \ge 20\right) \Leftrightarrow \beta \le 10 \text{ ή } \beta \ge 30 .$$

Άρα: $\beta \in (-\infty,-10] \cup [30,+\infty)$.

Δ4.

(i) $A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A) \le P(A \cup B)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$ (1)

(ii) $A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \le P(A \cup B)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$ (2)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:
$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$.