ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
Γ Λυκείου

Ζήτημα ①

A1 ⟶ σελ 253   A2 ⟶ σελ 191   A3 ⟶ σελ 258

A4 ⟶ α) → Σ   β) → Σ   γ) → Λ   δ) → Λ   ε) → Λ

Ζήτημα ②

B1 Από τη σχέση $|z-1|^2+|z+1|^2=4$ με $z=x+yi$ έχουμε:

$\left|(x-1)+yi\right|^2+\left|(x+1)+yi\right|^2=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4 \Leftrightarrow$

$x^2-2x+1+y^2+x^2+2x+1+y^2=4 \overset{:2}{\Leftrightarrow} \mathbf{x^2+y^2=1}$,

άρα οι εικόνες των z ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο δηλ. $\boxed{|z|=1 \; ①}$

B2 Δίνεται $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ και θέλουμε το $|z_1+z_2|$ όπου z_1, z_2 μιγαδικοί για τους οποίους ισχύουν από ① $|z_1|=|z_2|=1$, δηλ. $\mathbf{z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=1}$.

Από $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2 \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=2 \Leftrightarrow 1-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)+1=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$ ②.

Είναι $|z_1+z_2|^2=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}\overset{②}{=}1+0+1$, άρα $\boxed{|z_1+z_2|=\sqrt{2}}$

B3 Δίνεται $|w-5\overline{w}|=12$ και με $w=x+yi$ έχουμε:

$\left|x+yi-5(x-yi)\right|=12 \Leftrightarrow |-4x+6yi|=12 \overset{:2}{\Leftrightarrow} |-2x+3yi|=6 \Leftrightarrow$

$\sqrt{4x^2+9y^2}=6 \Leftrightarrow 4x^2+9y^2=36 \overset{:36}{\Leftrightarrow} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, **Έλλειψη με εστίες x΄x και** $\left\langle \begin{array}{l} \mathbf{\alpha=3} \\ \mathbf{\beta=2} \end{array}\right.$

Έτσι οι εικόνες των w με το max μέτρο θα ανήκουν στις κορυφές $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$

με $|w|_{max}=\alpha=3$, δηλ. $\mathbf{|w|\le 3}$ ③

και οι εικόνες των w με το min μέτρο θα ανήκουν στις κορυφές $B(0,\beta)$, $B'(0,-\beta)$

με $|w|_{min}=\beta=2$, δηλ. $\mathbf{|w|\ge 2}$ ④

B4 Από Τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} |z-w| \le |z|+|w| \overset{①}{=} |w|+1 \overset{③}{\le} 3+1=4 \\ |z-w| \ge \big||w|-|z|\big| \overset{①}{=} \big||w|-1\big| \overset{④}{\ge} |2-1|=1 \end{array}\right\} \text{δηλ. } \mathbf{1 \le |z-w| \le 4}$$

ΖΗΤΗΜΑ ③

Δίνεται η $f(x)=(x-1)\ln x-1$ με Π.Ο το $(0,+\infty)$.

Γ1 Για $x>0$ είναι $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$ με $f'(1)=0$ και

$f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$ στο $(0,+\infty)$, άρα η $f'(x)$ ↑ οπότε:

για $0<x<1$ είναι $f'(x)<f'(1)=0$, άρα η $f(x)$ ↓ στο $(0,1]$.

και για $x>1$ είναι $f'(x)>f'(1)=0$, άρα η $f(x)$ ↑ στο $[1,+\infty)$.

Είναι ολικό min το $f(1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$, αφού $\left\langle \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty\end{array}\right.$. Έτσι

στο $\Delta_1=(0,1]$ που η $f(x)$ ↓ θα έχει Σ.Τ το $f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=[-1,+\infty)$ και

στο $\Delta_2=[1,+\infty)$ που η $f(x)$ ↑ θα έχει Σ.Τ το $f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$.

Τελικά η f(x) έχει Σ.Τ το $\mathbf{f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)}$.

Γ2 Για $x>0$ από $x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013$

$\overset{-1}{\Leftrightarrow} (x-1)\ln x-1=2012$ δηλ έχω εξίσωση της μορφής $\mathbf{f(x)=2012}$.

Η τιμή 2012 ανήκει στο $f(\Delta_1)=[-1,+\infty)$ άρα υπάρχει $x_1\in(0,1)$ ώστε $\mathbf{f(x_1)=2012}$

(και επίσης $f'(x_1)<0$ ①) το οποίο είναι και μοναδικό αφού η $f(x)$ ↓ στο $(0,1]$ και

όμοια μοναδικό $x_2\in(1,+\infty)$ ώστε $\mathbf{f(x_2)=2012}$ (και $f'(x_2)>0$ ②).

Άρα η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$ έχει **2 ακριβώς ρίζες $\mathbf{0<x_1<1<x_2}$**.

Γ3 Θέλω την ύπαρξη $x_0\in(x_1,x_2)$ για το οποίο να ισχύει $f'(x_0)+f(x_0)=2012$,

δηλ. $x_0\in(x_1,x_2)$ που να επαληθεύει την εξίσωση $f'(x)+f(x)=2012$.

Έστω $h(x) = f'(x) + f(x) - 2012$, συνεχής σαν άθροισμα συνεχών στο $[x_1,x_2] \subseteq (0,+\infty)$.

$h(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) + 2012 - 2012 = f'(x_1) \overset{①}{<} 0$

$h(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) + 2012 - 2012 = f'(x_2) \overset{②}{>} 0$

Έτσι $h(x_1)h(x_2) < 0$, άρα από Θ. Bolzano το ζητούμενο.

Γ4 Θέλω το Ε του χωρίου που περικλείεται από την $g(x) = f(x) + 1 = (x-1)\ln x$ άξονα x΄x και την ε: x = e.

Το άλλο άκρο θα είναι ρίζα της $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Έτσι:

$E = \int_1^e |g(x)|dx = \int_1^e (x-1)\ln x dx$, αφού $(x-1)\ln x \geq 0$ για $x \geq 1$.

$$E = \frac{1}{2}\int_1^e \left((x-1)^2\right)' \cdot \ln x dx = \frac{1}{2}\left[(x-1)^2\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e (x-1)^2 \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$\frac{1}{2}\left((e-1)^2\ln e - 0\right) - \frac{1}{2}\int_1^e \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}(e-1)^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 2x + \ln x\right]_1^e =$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - 2e + 1) - \frac{1}{2}\left[\frac{e^2}{2} - 2e + \ln e - \left(\frac{1}{2} - 2 + \ln 1\right)\right] = \frac{1}{2}\left(e^2 - 2e + 1 - \frac{e^2}{2} + 2e - \frac{5}{2}\right)$$

$$\boxed{E = \frac{e^2 - 3}{4}}$$

ΖΗΤΗΜΑ ④

Για τη συνεχή στο $(0,+\infty)$ f(x) έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ άρα θα **διατηρεί σταθερό πρόσημο**

$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$ **A** για κάθε $x > 0$ και $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(x)|$ **B**.

Δ1 Έστω $g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Αφού η f(x) συνεχής στο $(0,+\infty)$, η $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ σαν **σύνθεση** των παραγωγίσιμων $\int_1^x f(t)dt$ και $x^2 - x + 1$.

Είναι λοιπόν $g'(x) = f(x^2 - x + 1)(2x - 1) - \frac{1-2x}{e}$.

Από $\boxed{A}$ είναι $g(x) \geq 0 = g(1)$ για κάθε $x > 0$, άρα η $g(x)$ εμφανίζει στο $x = 1$ min και αφού η $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (εσωτερικό) $x = 1$, από Θ. Fermat $g'(1) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(1)\left(2-1\right) - \frac{1-2}{e} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{f(1) = -\frac{1}{e}}}$$

Αφού λοιπόν η συνεχής $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και $f(1) < 0$,

θα είναι $f(x) < 0$ στο $\left(0,+\infty\right)$.

Έτσι η $\boxed{B}$ γίνεται: $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x) \overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$ $\boxed{\Gamma}$

και αφού οι όροι $\ln x - x$ και $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\left(0,+\infty\right)$ καθότι η συνάρτηση $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ συνεχής, προκύπτει ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

Από $\boxed{\Gamma}$ παραγωγίζοντας κατά μέλη για $x > 0$ προκύπτει:

$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$ σχέση της μορφής $h'(x) = h(x) \Leftrightarrow h(x) = ce^x$ (γνωστή εφαρμογή).

Έτσι $\frac{\ln x - x}{f(x)} = ce^x$ για κάθε $x > 0$, και για $x = 1$: $\frac{\ln 1 - 1}{f(1)} = ce \Leftrightarrow \frac{-1}{-\frac{1}{e}} = c\cdot e \Leftrightarrow$ $\mathbf{c = 1}$

οπότε $\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{f(x) = e^{-x}\left(\ln x - x\right)}}$

Δ2 Θέλω το $\lim_{x\to 0^+}\left(f^2(x)\cdot ημ\frac{1}{f(x)} - f(x)\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\left(ημ\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)f^2(x)\right)$.

Θέτω $\frac{1}{f(x)} = \frac{e^x}{\ln x - x} = u$ με $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{\ln x - x} \overset{\frac{1}{-\infty}}{=} 0$, αφού $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - x\right) = -\infty$.

Έτσι το όριο γίνεται $\lim_{u\to 0}\frac{ημu - u}{u^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{συνu - 1}{2u} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{συνu - 1}{u} = 0.$

Δ3 Μας δίνεται ότι $\ln x \le x - 1$ ① για κάθε $x > 0$

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ αφού η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ από τα παραπάνω και έχει:

$F'(x) = f(x) < 0$ (όπως δείξαμε), άρα η $F(x) \downarrow$ στο $(0,+\infty)$ και

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x - \left(\ln x - x\right)e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{\frac{1}{x} + x - 1 - \ln x}{e^x} \overset{①}{>} 0,$$

αφού $x - 1 - \ln x \ge 0$ και $\frac{1}{x} > 0$ στο $(0,+\infty)$.

Έτσι η $F(x) \downarrow$ και **κυρτή** στο $(0,+\infty)$, δηλ. η $\mathbf{F'(x)} \uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

Θέλω στο $(0,+\infty)$ να δείξω ότι $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$ ② δηλ.

$$F(3x) - F(2x) > F(2x) - F(x) \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} > \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} \overset{\text{ΘΜΤ}}{\Longleftrightarrow} F'(\xi_2) > F'(\xi_1),$$

έχοντας εφαρμόσει το Θ.Μ.Τ. στη συνεχή και παραγωγίσιμη $F(x)$ στα $[x,2x]$, $[2x,3x]$.

Έτσι με $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$, δηλ. $\xi_1 < \xi_2$ ισχύει ότι $F'(\xi_2) > F'(\xi_1)$ αφού η $F'(x) \uparrow$.

Δ4 Θέλω μοναδικό $\xi \in (\beta,2\beta) \subseteq (0,+\infty)$ ώστε $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$,

δηλ. μοναδικό $\xi \in (\beta,2\beta)$ που να επαληθεύει την εξίσωση $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(x)$.

Έστω $\varphi(x) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(x)$ παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[\beta,2\beta]$ με

$\varphi(\beta) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(\beta) = F(3\beta) - F(\beta) < 0$ αφού $3\beta > \beta$ για $\beta > 0$ και $F(x) \downarrow$,

$\varphi(2\beta) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(2\beta) \overset{②}{>} 0$ έχοντας θέσει στην προηγούμενη ② $x = \beta$.

Έτσι $\varphi(\beta)\varphi(2\beta) < 0$, άρα από Θ. Bolzano η $\varphi(x)$ έχει ρίζα στο $(\beta,2\beta)$, που επιπλέον είναι **μοναδικ**ή αφού η $\boldsymbol{\varphi(x)} \uparrow$ στο $[\beta,2\beta]$ γιατί $\varphi'(x) = -2F'(x) > 0$.

Καλή Επιτυχία