<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

28 ΜΑΪΟΥ 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Μια συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

γ) Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

δ) $(\sigma\varphi\, x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu\, x = 0\}$

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \qquad (1)$$

$$|w - 5\overline{w}| = 12 \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \le |z - w| \le 4$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1, \quad x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}, \quad x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \ne 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt \ge \frac{x - x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e \right) \cdot |f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x), \quad x > 0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \text{ημ}\dfrac{1}{f(x)} - f(x)\right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \le x-1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad x>0,$$

όπου $\alpha>0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$F(x)+F(3x) > 2\,F(2x)$, για κάθε $x>0$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta)+F(3\beta)=2\,F(\xi)$$

Μονάδες 4