

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 22 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό σελ.28

A2. Θεωρία σχολικό σελ.14

A3. Θεωρία σχολικό σελ.87

A4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

Είναι,

$$\begin{aligned} P(\omega_1) &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}^2-1^2}{x^2(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+x+1}+1)} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1) \cdot \sqrt{x^2+x+1}+1} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1) \cdot \sqrt{x^2+x+1}+1} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2+x+1}+1} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P(\omega_1) = \frac{1}{4}.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με παράγωγο,

$$f'(x) = \frac{x}{3} \ln x + \frac{x}{3} (\ln x)' = \frac{1}{3} \ln x + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (\ln x + 1)$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ για $x=1$ είναι το $f'(1) = \frac{1}{3}(0+1) = \frac{1}{3}$.

$$\text{Άρα } P(\omega_3) = \frac{1}{3}.$$

B2. Από τον αξιωματικό ορισμό ισχύει ότι,

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$$

$$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Επίσης είναι, $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

$$\text{Ισχύει ότι } \{\omega_3\} \subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3) \leq P(A') \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq P(A') \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι, $A' \subseteq \{\omega_1\}' \Leftrightarrow \{\omega_2, \omega_3\} \subseteq \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

Άρα, $P(A') \leq P(\{\omega_1\}') = P(A') \leq P\left[\left(\omega_1\right)'\right]$, οπότε

$$P(A') \leq 1 - P(\omega_1) \Leftrightarrow P(A') \leq 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A') \leq \frac{3}{4} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) ισχύει $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$.

B3. Έχουμε,

$$P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα, } P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + P(\omega_4) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$$

Όμως

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + P(\omega_2) + \frac{1}{3} + 0 = 1 \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

Συνεπώς $P(\omega_2) = \frac{5}{12}$.

Έχουμε,

$$P[(A-B) \cup (B-A)] \stackrel{(A-B) \cap (B-A) = \emptyset}{=} P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Το ενδεχόμενο $A \cap B = \{\omega_1\}$, άρα $P(A \cap B) = P(\omega_1)$.

Οπότε,

$$P[(A-B) \cup (B-A)] = P(\omega_1) + P(\omega_4) + P(\omega_1) + P(\omega_3) - 2P(\omega_1) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

Επίσης είναι, $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$, $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$.

$$\text{Άρα } A' - B' = \{\omega_3\}$$

$$\text{Επομένως, } P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\text{Ισχύει ότι, } \frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} = 85 \Leftrightarrow 100 + 70 = 170 \Leftrightarrow c = 10$$

Γ2.

Επειδή σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανομημένες ισχύει ότι στα διαστήματα $[70, 75]$ και $[75, 80]$ ανήκει το $\frac{f_3}{2}$ των παρατηρήσεων.

Η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή.

$$\text{Συνεπώς είναι } \frac{f_3}{2} + f_4 = 0,5 \quad (1)$$

$$\text{Αλλά δίνεται } f_4 = 2f_3 \quad (2)$$

Επομένως η (1) μέσω της (2) γίνεται

$$\frac{f_3}{2} + 2f_3 = 0,5 \Leftrightarrow f_3 + 4f_3 = 1 \Leftrightarrow 5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\text{Άρα από τη σχέση (2) προκύπτει } f_4 = 2 \cdot (0,2) = 0,4.$$

Επίσης έχουμε,

$$\bar{x} = 74 \Leftrightarrow x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 15 + 34 = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 = 25 \Leftrightarrow 11f_1 + 13f_2 = 5 \quad (3)$$

Είναι επίσης $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 + 2f_3 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 1 - 2 \cdot 0,2 = 0,6$ και άρα $f_1 + f_2 = 0,6 \quad (4)$.

Λύνουμε το σύστημα των (3) και (4) και παίρνουμε $f_1 = 0,2$ και $f_4 = 0,4$

Έτσι ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής.

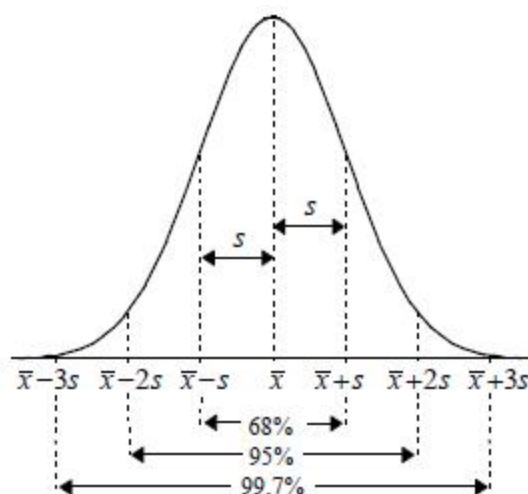
Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική συχνότητα f_i
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολο	-	1

Γ3.

Για την μέση τιμή έχουμε,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{x_1 \cdot f_1 \cdot v + x_2 \cdot f_2 \cdot v + x_3 \cdot f_3 \cdot v}{f_1 \cdot v + f_2 \cdot v + f_3 \cdot v} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3}{f_1 + f_2 + f_3} \\ &= \frac{5,5 + 19,5 + 15}{0,6} = \frac{40}{0,6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3} \end{aligned}$$

Γ4.



Το 2,5% των παρατηρήσεων ισούται με $\frac{100-95}{2} \%$

Επειδή το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του $\bar{x} + 25$ προκύπτει $\bar{x} + 25 = 74$ (1).

Το 16% των παρατηρήσεων είναι ίσο με $\frac{100-68}{2}\%$ άρα το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες του $\bar{x} - s$.

$$\text{Οπότε } \bar{x} - s = 68 \text{ (2)}$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) προκύπτει $\bar{x} = 70$ και $s = 2$.

Ο συντελεστής μεταβολής ισούται με $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}$. Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με $f'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$ και $f(1) = \kappa$ και $f'(1) = 1$.

Τότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(1, f(1))$ είναι η:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - \kappa = x - 1 \Leftrightarrow y = x + \kappa - 1$$

Τέμνει τον x' όταν $y = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \kappa$

Τέμνει τον y' όταν $x = 0 \Leftrightarrow y = \kappa - 1$

$$E = \frac{1}{2}(x_A)(y_B) = \frac{1}{2}|1 - \kappa||\kappa - 1| = \frac{1}{2}|\kappa - 1|^2$$

$$\text{Θέλουμε } E < 2 \Leftrightarrow |\kappa - 1|^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3 \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \boxed{\kappa = 2} \stackrel{\kappa > 1}{\Leftrightarrow}$$

Δ2. α. Άρα για $\kappa = 2$ είναι η $f(x) = x \ln x + 2$ και η $(\varepsilon): y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$

Οι τιμές x_i προκύπτουν από τις y_i αν προσθέσουμε $c_1 = -1$. Τότε από βασική εφαρμογή έχουμε: $\bar{x} = \bar{y} + c_1 \Leftrightarrow \bar{x} = 31 - 1 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 30}$

$$\beta. \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{50}}{50} \Leftrightarrow 30 \cdot 50 = x_1 + x_2 + \dots + x_{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{50} = 1500 \text{ (1)}$$

$$\bar{x}' = \frac{x'_1 + x'_2 + \dots + x'_{50}}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}' = \frac{x'_1 + x'_2 + \dots + x'_{20} + x'_{21} + \dots + x'_{35} + x'_{30} + \dots + x'_{50}}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31 \cdot 50 = x_1 + 3 + x_2 + 3 + \dots + x_{20} + 3 + x_{21} + \dots + x_{35} + x_{30} - \lambda + \dots + x_{50} - \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1550 = (x_1 + x_2 + \dots + x_{20}) + 20 \cdot 30 + (x_{21} + \dots + x_{35}) + (x_{36} + x_{50}) - 15\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1550 = (x_1 + x_2 + \dots + x_{50}) + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1550 = 1500 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1560 - 1550 = 15\lambda \Leftrightarrow 10 = 15\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$$

Δ3. $f'(x) = \ln x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = \frac{1}{e}$ με $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} + 2 > 0$

Άρα για κάθε $x \in A_f$ το $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} + 2 > 0$.

Τα $\alpha, \beta, \gamma, e \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ με $\alpha < \beta < \gamma < e \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) \Leftrightarrow$
 $-\frac{1}{e} + 2 \leq f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$

Όμως $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ άρα:

$$0 < -\frac{1}{e} + 2 < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

Τότε $R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e \ln e + 2 - 0 = e + 2$ δηλαδή $\boxed{R = e + 2}$

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} \left[f'\left(\frac{1}{e}\right) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) \right] =$$

$$= \frac{1}{5} (0 + \alpha \ln \alpha + 2 + \beta \ln \beta + 2 + \gamma \ln \gamma + 2 + e \ln e + 2) =$$

$$= \frac{1}{5} (\ln \alpha^\alpha + \ln \beta^\beta + \ln \gamma^\gamma + 6 + 2 + e) =$$

$$= \frac{1}{5} (\ln \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma + 8 + e) = \frac{1}{5} (\ln e^7 + 8 + e) = \frac{1}{5} (7 + 8 + e) = \frac{15 + e}{5}$$

Άρα $\boxed{\bar{x} = \frac{15 + e}{5}}$

$$\Delta 4. f'(t) = \varepsilon \varphi \hat{\omega} \stackrel{\hat{\omega}=90^\circ}{\Leftrightarrow} f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln t > -1 \Leftrightarrow t > \frac{1}{e} \text{ \acute{a}\rho\alpha } A = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{30}\}$$

$$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t \ln t > \ln t + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t(t-1) > 0$$

x	0	1	$+\infty$
t-1	-	0	+
ln t	-	0	+
Γινόμενο	+	0	+

$$\text{\acute{A}\rho\alpha } \Gamma > 0 \Leftrightarrow t \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$\text{Επομένως } B = \{t_1, t_2, \dots, t_{29}\}$$

$$\alpha) P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\beta) P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$$

